Info(s)

Effectifs excos

Salle	# Étudiant.es	# Assistant.es	Capacité salle
INF 019	37	3	60
INF 213	17	3	54
INJ 218	33	4	90
INM 202	23	4	86

<u>Cours Mercredi</u> : Ça sera une vidéo ! Le STCC n'est pas dispo

Retour sur série 1 : Partie III Ex 3 b)

$x^{1/3}$, est-ce défini pour $x = 0$?

Réponse de l'algébriste

$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ = l'unique solution s de $s^3 = x$

$\rightarrow$ défini $\forall x \in \mathbb{R}$

Réponse de l'analyste

$x^{1/3} = e^{\frac{1}{3}\log(x)}$

$\hookrightarrow$ défini uniquement pour $x > 0$

OK, on que $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{3}} = 0$, on pourrait définir $0^{1/3} = 0$.

Mais si on veut dérivabilité, on

on écrit

⚠ a^b $b \in \mathbb{Z}$ défini uniquement pour $a \geq 0$

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{6}} = \left((-1)^2\right)^{1/6} = 1^{1/6} = 1$$

Vrai uniquement pour $a \geq 0$

Rappels Fonction $f : X \to Y$

Le f de x

interdit : • un $x \in X$ n'a pas d'image

• un $x \in X$ a plusieurs images

autorisés : • deux éléments $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ ont la même image : $f(x_1) = f(x_2)$

• un élément du codomaine $y \in Y$ n'a pas de préimage

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$

$x_1 = -1$ et $x_2 = +1$

$f(x_1) = 1 = f(x_2)$ is ok!

$y = -4$ y a pas de préimage is ok!

Exemples 0.30 (suite)

(iii) $f : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\frac{a}{b} \longmapsto f\left(\frac{a}{b}\right) = b.$

Est-ce une fonction ? Non !

$f(0{,}5) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$= f\left(\frac{2}{4}\right) = 4$

Si on redéfinit $f : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\frac{a}{b} \longmapsto f\left(\frac{a}{b}\right) = b \text{ où } \frac{a}{b} \text{ est irréductible}$$

est une fonction !

$$f\left(\frac{2}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

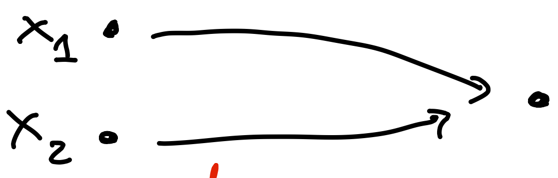
Définition 0.31 Fonction injective, surjective, bijective.

Soit $f : X \to Y$ une fonction

(i) On dit que f est <u>injective</u> ou est une <u>injection</u> si

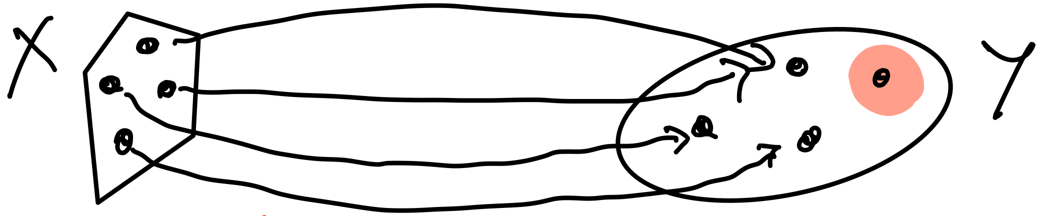
$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

"pour tout"



Interdit pour une fonction injective !

(ii) On dit que f est <u>surjective</u> ou f est une <u>surjection</u> si $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tq $f(x) = y$



Interdit pour les fonctions surjectives

(iii) On dit que f est bijective ou f est une bijection si f est injective et surjective.

<u>Exemples</u> 0.33

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(i) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$

Alors, f est bijective.

Montrons que f est injective par contraposée

$A \Rightarrow B$ est équivalent à $\neg B \Rightarrow \neg A$ où "$\neg$" négation logique

Une personne peut voter $\Rightarrow$ majeure

$\Updownarrow$

Une personne mineure $\Rightarrow$ peut pas voter

i.e. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, $\cancel{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Am : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ quelconques.

Si $f(x_1) = f(x_2)$, on a $x_1^2 = x_2^2 \overset{\sqrt{\cdot}}{\Longrightarrow} \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$

$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$. Or, vu que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, on a $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

$\sqrt{a^2} = |a|$

et donc $|x_1| = x_1$ et $|x_2| = x_2$, et pour finir

$x_1 = |x_1| = |x_2| = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Vu que x_1 et x_2 sont quelconques, on a le résultat voulu.

Formules de politesse Hypothèse Déductions Justifications Conclusion

Question : pourquoi $\sqrt{a^2} = |a|$ et pas $\sqrt{a^2} = \pm a$.

Appliquer des fonctions à la chaîne : $\sqrt{a^2}$

$a \to a^2 \longrightarrow \sqrt{a^2} = |a|$

$2 \to 4 \longrightarrow 2 = |2|$

$-2 \to 4 \longrightarrow 2 = |-2|$

Résoudre une équation du $2^{\text{ème}}$ degré : $x^2 = a^2$

toutes les solutions sont $S = \{-a, +a\} = \{-|a|, +|a|\}$

Montrons que f est surjective

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto f(x) = x^2$

$\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}_+$ tq $f(x) = y$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$ quelconque. Posons $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$.

Alors, $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

y étant quelconque, on a le résultat

le codomaine a changé !

(ii) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$

Montrons que f est injective et pas surjective.

Pour montrer l'injectivité la démo est la même que pour (i)

Montrons que f n'est pas surjective

Comment montrer que quelque chose est faux ?
On montre que sa négation logique est vraie !
C'est quoi la négation logique ? Pour un énoncé
A, sa négation logique notée $\neg A$ est l'énoncé
tq A vrai $\Leftrightarrow$ $\neg A$ est faux   A faux $\Leftrightarrow$ $\neg A$ vrai

Dans le cas de propriétés simples, la négation logique et celle du langage coïncident : "$\neg(x=y)$"
$=$ "$x \neq y$".

Dans le cas d'énoncé plus complexes avec des quantificateurs ($\forall$, $\exists$) la négation du langage et la négation logique ne coïncident plus ... :-)

A = "Toutes les personnes dans cette salle ont une bouteille sur la tête"

négation lang (A) = "Toutes les personnes dans cette salle n'ont pas de bouteille sur la tête"

si M. Strütt est le seul avec une bouteille sur la tête, les deux énoncés sont faux

La négation logique se construit avec des règles de calcul. (voir Annexe A, remarque A.6 du poly & série 2)

$\neg(A \text{ ou } B) = \neg A \text{ et } \neg B$ (1)

$\neg(A \text{ et } B) = \neg A \text{ ou } \neg B$ (2)

$\neg(A \Rightarrow B) = A \text{ et } \neg B$ (3)

$\neg(\forall x \in X, \ldots) = \exists x \in X \text{ tq } \neg(\ldots)$ (4)

$\neg(\exists x \in X \text{ tq } \ldots) = \forall x \in X, \neg(\ldots)$ (5)

$\neg$(f est surjective)

$\neg\left(\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } f(x)=y\right)$

(4) $\exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \neg\left(\exists x \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } f(x)=y\right)$

(5) $\exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}_+\ \neg\left(f(x)=y\right)$

$\exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \neq y$

Démonstration :

Posons $y=-1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ quelconque. Alors, $f(x) = x^2 \geq 0 > -1 = y$. En particulier $f(x) > y$

$\Rightarrow f(x) \neq y$.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ (Par rapport à (i), le domaine a changé)

Montrons que f est surjective mais pas injective.

Pour la surjectivité, idem qu'en (i)

$\neg(f \text{ injective})$

$$\neg\left(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right)$$

(4)

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tq } \neg\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right)$$

(3)

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tq } x_1 \neq x_2 \text{ et } \neg\left(f(x_1) \neq f(x_2)\right)$$

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tq } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2).$$

Posons $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Alors, $x_1 \neq x_2$

De plus, $f(x_1) = x_1^2 = 1^2 = 1$ et $f(x_2) = x_2^2 = (-1)^2 = 1$

Ainsi, $f(x_1) = 1 = f(x_2)$, qui est le résultat voulu.